

## Analysis-II / Übungsblatt 1 - Aufgabe 2

### Zweite Ableitung als Grenzwert der symmetrischen zweiten Differenz

#### Aufgabenstellung

Seien  $a \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$ . Sei

$$f : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$$

zweimal differenzierbar. Zeigen Sie:

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

# 1 Grundidee der Aufgabe

Wir sollen zeigen, dass der Ausdruck

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

für  $h \rightarrow 0$  gegen  $f''(a)$  konvergiert.

Dieser Ausdruck heißt auch *symmetrische zweite Differenz*. Er betrachtet die Funktionswerte links und rechts von  $a$ , nämlich

$$f(a-h) \quad \text{und} \quad f(a+h),$$

und vergleicht sie mit dem mittleren Wert  $f(a)$ .

Die Idee ist:

- Wir entwickeln  $f(a+h)$  mit Taylor um den Punkt  $a$ .
- Wir entwickeln auch  $f(a-h)$  mit Taylor um den Punkt  $a$ .
- Danach addieren wir beide Entwicklungen passend.
- Die linearen Terme heben sich wegen der Symmetrie weg.
- Übrig bleibt im Grenzwert genau  $f''(a)$ .

## Merke

Der zentrale Grund für die Formel ist die Symmetrie:

$$a+h \quad \text{und} \quad a-h.$$

Dadurch fallen die Terme mit  $f'(a)$  heraus.

## 2 Taylorentwicklung: Definition und Bedeutung

### 2.1 Taylorentwicklung erster Ordnung

Wenn eine Funktion  $f$  in  $a$  differenzierbar ist, dann kann man sie nahe bei  $a$  näherungsweise durch eine lineare Funktion beschreiben:

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h.$$

Dabei ist:

- $f(a)$  der Funktionswert an der Stelle  $a$ ,
- $f'(a)$  die Steigung an der Stelle  $a$ ,
- $h$  die kleine Verschiebung von  $a$  nach  $a+h$ .

Für kleine  $h$  sagt diese Formel also:

$$f(a+h)$$

liegt ungefähr auf der Tangente an den Graphen von  $f$  im Punkt  $a$ .

## 2.2 Taylorentwicklung zweiter Ordnung

Wenn  $f$  zweimal differenzierbar ist, kann man zusätzlich die Krümmung berücksichtigen. Dann lautet die Taylorentwicklung zweiter Ordnung:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \text{Rest.}$$

Der zusätzliche Term

$$\frac{1}{2}f''(a)h^2$$

beschreibt den quadratischen Anteil der Funktion nahe bei  $a$ .

### Satz Taylorentwicklung zweiter Ordnung mit Peano-Restglied

Ist  $f$  in einer Umgebung von  $a$  zweimal differenzierbar, dann gilt für  $h \rightarrow 0$ :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + o(h^2).$$

Das bedeutet ausführlich: Es gibt eine Funktion  $r(h)$ , sodass

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + r(h),$$

wobei

$$r(h) = o(h^2)$$

gilt.

### Hinweis

Für diese Aufgabe ist genau diese Taylorformel entscheidend. Wir brauchen die Entwicklung bis zur Ordnung 2, weil im Nenner des gesuchten Grenzwertes  $h^2$  steht.

## 3 Ordnungen: Was bedeutet $o(h^2)$ ?

### 3.1 Definition von $o(h^2)$

#### Definition $o(h^2)$

Eine Funktion  $r(h)$  heißt ein *Restglied der Ordnung  $o(h^2)$*  für  $h \rightarrow 0$ , wenn gilt:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^2} = 0.$$

Man schreibt dann:

$$r(h) = o(h^2).$$

Das bedeutet anschaulich:

$$r(h)$$

ist für  $h \rightarrow 0$  deutlich kleiner als  $h^2$ .

Oder anders gesagt:

$$r(h)$$

verschwindet schneller als  $h^2$ .

### Merke

Die Schreibweise

$$r(h) = o(h^2)$$

bedeutet nicht einfach nur, dass  $r(h) \rightarrow 0$ . Es bedeutet stärker:

$$\frac{r(h)}{h^2} \rightarrow 0.$$

Das ist genau die Eigenschaft, die wir später beim Teilen durch  $h^2$  brauchen.

## 4 Warum auch $r(-h) = o(h^2)$ gilt

Für den Beweis benötigen wir Taylor einmal für  $a + h$  und einmal für  $a - h$ .

Wenn

$$r(h) = o(h^2),$$

dann gilt auch

$$r(-h) = o(h^2).$$

Warum?

Aus

$$r(t) = o(t^2)$$

folgt definitionsgemäß:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t)}{t^2} = 0.$$

Setzen wir nun

$$t = -h,$$

dann gilt für  $h \rightarrow 0$  auch:

$$t = -h \rightarrow 0.$$

Außerdem ist

$$t^2 = (-h)^2 = h^2.$$

Also:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(-h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(-h)}{(-h)^2} = 0.$$

Damit gilt:

$$r(-h) = o(h^2).$$

### Hinweis

Das ist ein kleiner, aber wichtiger Punkt. Der Fehler vieler Lösungen besteht darin, das Restglied bei  $a - h$  nicht sauber zu behandeln.

## 5 Überprüfung der Voraussetzungen

Wir haben gegeben:

$$f : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$$

ist zweimal differenzierbar.

Damit existieren insbesondere:

$$f(a), \quad f'(a), \quad f''(a).$$

Außerdem liegt  $a$  im Inneren des Definitionsbereichs, weil

$$a \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Für den Ausdruck

$$f(a + h)$$

muss  $a + h$  im Definitionsbereich liegen.

Für den Ausdruck

$$f(a - h)$$

muss  $a - h$  ebenfalls im Definitionsbereich liegen.

Wir prüfen das.

Sei

$$|h| < \varepsilon.$$

Dann gilt:

$$-\varepsilon < h < \varepsilon.$$

Addieren wir überall  $a$ , erhalten wir:

$$a - \varepsilon < a + h < a + \varepsilon.$$

Also liegt

$$a + h \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Ebenso folgt aus

$$-\varepsilon < h < \varepsilon$$

durch Multiplikation mit  $-1$ :

$$-\varepsilon < -h < \varepsilon.$$

Addieren wir wieder  $a$ , erhalten wir:

$$a - \varepsilon < a - h < a + \varepsilon.$$

Also liegt auch

$$a - h \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

Damit sind für hinreichend kleine  $h$  beide Werte

$$f(a + h) \quad \text{und} \quad f(a - h)$$

wohldefiniert.

### Merke

Der Grenzwert  $h \rightarrow 0$  betrachtet nur beliebig kleine  $h$ . Deshalb dürfen wir uns auf  $h$  mit  $|h| < \varepsilon$  beschränken.

## 6 Taylorentwicklung von $f(a + h)$

Nach der Taylorentwicklung zweiter Ordnung gilt:

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + r_+(h),$$

wobei

$$r_+(h) = o(h^2)$$

gilt.

Das bedeutet:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_+(h)}{h^2} = 0.$$

Wir verwenden hier bewusst die Bezeichnung  $r_+(h)$ , weil dieses Restglied zur Entwicklung von  $f(a + h)$  gehört.

Also haben wir:

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + r_+(h)$$

mit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_+(h)}{h^2} = 0.$$

## 7 Taylorentwicklung von $f(a - h)$

Nun entwickeln wir  $f(a - h)$ . Dazu setzen wir in die Taylorentwicklung statt  $h$  den Wert  $-h$  ein.

Allgemein gilt:

$$f(a + k) = f(a) + f'(a)k + \frac{1}{2}f''(a)k^2 + r(k),$$

wobei

$$r(k) = o(k^2).$$

Wir wählen nun

$$k = -h.$$

Dann ist:

$$f(a - h) = f(a) + f'(a)(-h) + \frac{1}{2}f''(a)(-h)^2 + r(-h).$$

Jetzt vereinfachen wir Schritt für Schritt.

Erstens gilt:

$$f'(a)(-h) = -f'(a)h.$$

Zweitens gilt:

$$(-h)^2 = h^2.$$

Also:

$$\frac{1}{2}f''(a)(-h)^2 = \frac{1}{2}f''(a)h^2.$$

Damit erhalten wir:

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + r(-h).$$

Wir nennen das Restglied nun

$$r_-(h) := r(-h).$$

Dann gilt, wie oben gezeigt:

$$r_-(h) = o(h^2).$$

Also:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_-(h)}{h^2} = 0.$$

Damit haben wir:

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + r_-(h)$$

mit

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_-(h)}{h^2} = 0.$$

### Hinweis

Der wichtigste Unterschied zwischen den beiden Taylorentwicklungen ist das Vorzeichen beim linearen Term:

$$f'(a)h \quad \text{und} \quad -f'(a)h.$$

Genau diese beiden Terme werden sich später gegenseitig aufheben.

## 8 Einsetzen in den Ausdruck

Wir betrachten nun den Zähler:

$$f(a + h) - 2f(a) + f(a - h).$$

Wir setzen die beiden Taylorentwicklungen ein.

Für  $f(a + h)$  gilt:

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + r_+(h).$$

Für  $f(a - h)$  gilt:

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + r_-(h).$$

Damit ist:

$$\begin{aligned} f(a + h) - 2f(a) + f(a - h) &= \left( f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + r_+(h) \right) \\ &\quad - 2f(a) \\ &\quad + \left( f(a) - f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + r_-(h) \right). \end{aligned}$$

Jetzt sortieren wir alle Terme nach ihrer Ordnung.

Zuerst die konstanten Terme:

$$f(a) - 2f(a) + f(a).$$

Dann die linearen Terme:

$$f'(a)h - f'(a)h.$$

Dann die quadratischen Terme:

$$\frac{1}{2}f''(a)h^2 + \frac{1}{2}f''(a)h^2.$$

Und zuletzt die Restglieder:

$$r_+(h) + r_-(h).$$

Also:

$$\begin{aligned} f(a+h) - 2f(a) + f(a-h) &= \underbrace{f(a) - 2f(a) + f(a)}_{\text{konstante Terme}} \\ &\quad + \underbrace{f'(a)h - f'(a)h}_{\text{lineare Terme}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2}f''(a)h^2 + \frac{1}{2}f''(a)h^2}_{\text{quadratische Terme}} \\ &\quad + r_+(h) + r_-(h). \end{aligned}$$

Nun vereinfachen wir.

Für die konstanten Terme gilt:

$$f(a) - 2f(a) + f(a) = 0.$$

Für die linearen Terme gilt:

$$f'(a)h - f'(a)h = 0.$$

Für die quadratischen Terme gilt:

$$\frac{1}{2}f''(a)h^2 + \frac{1}{2}f''(a)h^2 = f''(a)h^2.$$

Daher folgt:

$$f(a+h) - 2f(a) + f(a-h) = f''(a)h^2 + r_+(h) + r_-(h).$$

Wir haben also gezeigt:

$$\boxed{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h) = f''(a)h^2 + r_+(h) + r_-(h).}$$

## 9 Division durch $h^2$

Nun betrachten wir den Ausdruck aus der Aufgabe:

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

Wichtig ist:

$$h \neq 0,$$

denn für  $h = 0$  wäre der Nenner  $h^2 = 0$ .

Für den Grenzwert  $h \rightarrow 0$  betrachten wir also  $h$  nahe bei 0, aber nicht gleich 0.

Aus

$$f(a+h) - 2f(a) + f(a-h) = f''(a)h^2 + r_+(h) + r_-(h)$$

folgt durch Division durch  $h^2$ :

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = \frac{f''(a)h^2 + r_+(h) + r_-(h)}{h^2}.$$

Nun teilen wir jeden Summanden einzeln durch  $h^2$ :

$$\frac{f''(a)h^2 + r_+(h) + r_-(h)}{h^2} = \frac{f''(a)h^2}{h^2} + \frac{r_+(h)}{h^2} + \frac{r_-(h)}{h^2}.$$

Da

$$\frac{f''(a)h^2}{h^2} = f''(a),$$

erhalten wir:

$$\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a) + \frac{r_+(h)}{h^2} + \frac{r_-(h)}{h^2}.$$

Also gilt:

$$\boxed{\frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a) + \frac{r_+(h)}{h^2} + \frac{r_-(h)}{h^2}.}$$

## 10 Grenzübergang

Nun lassen wir  $h \rightarrow 0$ .

Wir wissen:

$$r_+(h) = o(h^2).$$

Nach Definition von  $o(h^2)$  bedeutet das:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_+(h)}{h^2} = 0.$$

Außerdem wissen wir:

$$r_-(h) = o(h^2).$$

Also gilt ebenfalls:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_-(h)}{h^2} = 0.$$

Daher folgt:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left( f''(a) + \frac{r_+(h)}{h^2} + \frac{r_-(h)}{h^2} \right) \\ &= f''(a) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_+(h)}{h^2} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r_-(h)}{h^2} \\ &= f''(a) + 0 + 0 \\ &= f''(a). \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt:

$$\boxed{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = f''(a).}$$

Also gilt äquivalent:

$$\boxed{f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.}$$

## Beweis

Da  $f$  auf  $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$  zweimal differenzierbar ist, dürfen wir für hinreichend kleine  $h$  die Taylorentwicklung zweiter Ordnung in  $a$  verwenden.

Es gilt:

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + r_+(h), \quad r_+(h) = o(h^2),$$

und

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + r_-(h), \quad r_-(h) = o(h^2).$$

Addieren wir diese beiden Gleichungen und subtrahieren  $2f(a)$ , erhalten wir:

$$f(a + h) - 2f(a) + f(a - h) = f''(a)h^2 + r_+(h) + r_-(h).$$

Für  $h \neq 0$  folgt:

$$\frac{f(a + h) - 2f(a) + f(a - h)}{h^2} = f''(a) + \frac{r_+(h)}{h^2} + \frac{r_-(h)}{h^2}.$$

Da

$$\frac{r_+(h)}{h^2} \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \frac{r_-(h)}{h^2} \rightarrow 0$$

für  $h \rightarrow 0$ , erhalten wir:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - 2f(a) + f(a - h)}{h^2} = f''(a).$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

## 11 Zusätzliche Erklärung: Warum verschwindet die erste Ableitung?

Die Taylorentwicklungen lauten:

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + r_+(h),$$

und

$$f(a - h) = f(a) - f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + r_-(h).$$

Der Term mit der ersten Ableitung ist bei  $f(a + h)$ :

$$+f'(a)h.$$

Der Term mit der ersten Ableitung ist bei  $f(a - h)$ :

$$-f'(a)h.$$

Beim Addieren entsteht daher:

$$f'(a)h - f'(a)h = 0.$$

Das ist der Grund, warum der symmetrische Ausdruck nicht die erste Ableitung, sondern die zweite Ableitung liefert.

### Merke

Die erste Ableitung beschreibt die lokale Steigung. Die zweite Ableitung beschreibt die lokale Krümmung.

Der Ausdruck

$$f(a + h) - 2f(a) + f(a - h)$$

ist so gebaut, dass die Steigung herausfällt und die Krümmung übrig bleibt.